PRESENTACIÓN

La proporcionalidad es uno de los conceptos matemáticos más intuitivos y usados en la vida cotidiana. Así nos referimos al cuerpo humano como "bien proporcionado" en un sentido estético, cuando cada una de sus partes y el conjunto total guardan armonía. Desde la Grecia antigua los artistas definieron un canon[1] del cuerpo humano como la proporción entre el alto de la cabeza y la altura total de la persona, estableciendo que la belleza se halla con el canon de 7 u 8 cabezas.

También solemos utilizarlo para comparar fenómenos en distintos ámbitos: "proporcionalmente una hormiga es más fuerte que un elefante ", "una pulga puede saltar hasta 130 veces su altura"; "la proporción de agua en la composición de un tomate es la misma que en el ser humano".

Merecen especial mención los porcentajes, una de las expresiones matemáticas que más encontramos habitualmente. El interés que cobra un banco por un préstamo, infinidad de datos divulgados en los medios de comunicación o las rebajas de un centro comercial, son algunos ejemplos familiares que se indican en tantos por ciento.

En esta unidad se comienza a trabajar el concepto de función y el manejo del plano Cartesiano, entretejiéndolos con la búsqueda de representaciones (algebraica, tabular y gráfica) para estudiar diversas situaciones que involucran cambio.

[1] Canon, término de origen griego que significa regla, modelo.

UNIDAD 2: **VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL Y FUNCIONES LINEALES**

Propósitos de la unidad:
A partir de la revisión de aspectos de la aritmética y de la noción de proporcionalidad, iniciar el manejo de la representación algebraica en el estudio de la variación, la idea de relación funcional, la graficación de funciones lineales, su registro tabular y su relación con los parámetros de $y = ax + b$.

2.1 VARIACIÓN PROPORCIONAL DIRECTA

Matemáticamente, hablamos de **proporcionalidad** cuando dos magnitudes x, y están relacionadas mediante una fórmula del tipo $y = kx$. Es decir, dos magnitudes están relacionadas de modo que si una varía, produce una variación en la otra.

Al comparar dos magnitudes se pueden presentar distintas relaciones, en nuestro caso estudiaremos sólo el siguiente tipo:
Si el aumento de una de ellas es el doble, el triple, etc., produce que la otra aumente en la misma proporción, es decir, el doble, el triple…, entonces, estas magnitudes guardan una **proporcionalidad directa.**

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** si al multiplicar cualquiera de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra queda multiplicado por dicho número.

Hablar de proporcionalidad conlleva hablar del concepto de razón entre dos números.

La **razón entre dos cantidades** es el cociente o división entre ambas, se escribe siempre en forma de fracción**.**

Si a y b representan números con $b \neq 0$, **la razón** entre a y b puede ser expresada en cualquiera de las siguientes formas: $\frac{a}{b}$, $a \div b$, $a : b$

Una **proporción numérica** es la igualdad entre dos razones: $\boldsymbol{\frac{a}{c} = \frac{b}{d}}$, la cual también se puede escribir como $\boldsymbol{a : c = b : d}$, donde $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{b}$ se llaman medios y $\boldsymbol{a}$ y d se llaman extremos.
En toda proporción se cumple la propiedad fundamental de las proporciones, el producto de medios es igual al producto de extremos: $\boldsymbol{a \times d = b \times c}$

El valor de este cociente (una vez efectuada la división) recibe el nombre de **constante de proporcionalidad**, es decir, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k$

2.1.1 Situaciones que involucran cambio. Introducción a la noción de variación.

Aprendizaje.
El alumno describe verbalmente en qué consiste el cambio y cuáles son los aspectos involucrados en él.

Analizaremos algunas situaciones que involucran un cambio o variación directa.

1) Si un chicle cuesta 50 centavos, ¿cuánto cuestan 8 chicles?

Solución:

1 chicle cuesta ¢50 = \$0.5

8 chicles costarán $\frac{8}{1}(0.5) = 8(0.5) = \$4$

Observación: Al cambiar el número de chicles cambia el costo de forma directamente proporcional ya que $\frac{0.5}{1} = \frac{4}{8} = 0.5$, donde $0.5 = \frac{1}{2}$ es la constante de proporcionalidad.

2) Abril tarda 25 minutos en recorrer 3 Km, siguiendo el mismo ritmo, ¿cuánto tardará en recorrer 2 km?

Solución:

3 km en 25 minutos

2 km en $\frac{2}{3}(25) = \frac{50}{3}$ = 16 minutos 36 segundos.

Observación: Al cambiar el número de kilómetros cambia el tiempo en forma directamente proporcional donde $\frac{25}{3}$ es la constante de proporcionalidad, que se obtiene analizando los minutos que tarda Abril para 1 km.

3) En las instrucciones de un determinado medicamento se lee que por cada 5 kg de peso de una persona han de tomarse 3 mg al día. Si una persona enferma pesa 60 kg, ¿cuántos mg ha de tomar?

Solución:

Si pesa 5 kg tomará 3 mg al día.

Si pesa 60 kg tomará $\frac{60}{5}(3) = 12(3) = 36$ mg al día.

Observación: Cambia el peso y cambia en forma directamente proporcional la cantidad de medicamento donde $\frac{3}{5} = 0.6$ es la constante de proporcionalidad, que se obtiene analizando por 1 kg, es decir, “reduciendo a la unidad”.

4) Si en un paquete de galletas cuyo contenido es de 40 gr. dice que te proporciona 172 kilocalorías, ¿cuántas kilocalorías te proporcionarán 10 gr. de las mismas galletas?

Solución:

40 gr proporciona 172 kilocalorías.

10 gr proporciona $\frac{10}{40}(172) = \frac{1}{4}(172) = 43$ kilocalorías.

Observación: Cambia los gramos y cambia en forma directamente proporcional la cantidad de kilocalorías donde $\frac{43}{10} = 4.3$ es la constante de proporcionalidad, que se obtiene “reduciendo a la unidad” y simplificando.

5) El alargamiento que sufre un resorte varía directamente con el peso que cuelga de él. Si un peso de 12 gramos estira un resorte 3 centímetros, ¿cuántos gramos se necesitan para estirar el resorte 5 cm? y ¿cuál es la constante de variación o de proporcionalidad?

Solución:

El resorte se estira 3 cm con un peso de 12 gr.

El resorte se estira 5 cm con un peso de $\frac{5}{3}(12) = 5(\frac{12}{3}) = 5(4) = 20$ gr.

Observación: Cambia los gramos y cambia la longitud del resorte en forma directamente proporcional, donde $\frac{12}{3} = 4$ es la constante de proporcionalidad, que se obtiene “reduciendo a la unidad”, para 1 cm.

6) En una explotación ganadera para la alimentación diaria de 30 terneras se necesitan 210 kg. de alimento. Los dueños van a ampliar el ganado con 20 reses más y calculan las nuevas necesidades alimenticias. ¿Cuánto alimento tendrán que comprar para las 50 terneras?

Solución:

Se trata de dos magnitudes directamente proporcionales, número de terneras y cantidad de alimento, de las que nos dan tres cantidades y nos piden el valor de una cuarta.

Para resolverlo, conviene “reducir a la unidad”, hallando el consumo de alimento correspondiente a una ternera y multiplicándolo por el total de animales.

En nuestro ejemplo, para una ternera hacen falta: $\frac{210}{30} = 7$ kg. de alimento, para 50 terneras se necesitarán $7(50) = 350$ kg. de alimento.

7) Una bomba de agua llena en 25 minutos un tinaco de 800 litros de capacidad, ¿cuántos minutos tardará en vaciar 288 litros?

Solución:

Tenemos dos magnitudes directamente proporcionales, la cantidad de litros y el tiempo, nos dan tres cantidades y nos piden el valor de una cuarta.

Para resolverlo, conviene “reducir a la unidad”, hallando los litros que vacía la bomba en un minuto, y el resultado lo dividiremos entre 288 litros.

En nuestro ejemplo, en un minuto la bomba vacía: $\frac{800}{25}$ = 32 litros, vaciar 288 litros en el tinaco tardará $\frac{288}{32}$ = 9 minutos.

Ejercicios 2.1.1

I. Para cada uno de las siguientes situaciones indica si se trata de una variación directamente proporcional (VDP) o no.

1) La distancia medida sobre un plano o mapa realizado a una escala dada y la distancia real.

2) El plano de una casa, hecho a escala 1:10.

3) La distancia recorrida por un caminante, de tal forma que cada 15 minutos disminuye su velocidad.

4) El precio de un bolígrafo y el número de bolígrafos que se pueden comprar con $50.

5) La altura de un árbol y la longitud de su sombra.

6) Una tienda ofrece ropa a cierto precio, pero a partir de tres prendas se considera como venta de mayoreo y da precio especial.

7) La distancia de frenado y la velocidad de un automóvil.

8) Un grupo de 20 artesanos fabrican 50 cestos para ropa en 8 días. ¿Cuántos artesanos deben trabajar para que en 5 días fabriquen 60 cestos de ropa?

9) La masa de un cuerpo homogéneo y su volumen.

10) El precio que pagamos al comprar un producto (por ejemplo, al llenar el depósito de gasolina) y la cantidad comprada (litros, en el ejemplo).

11) La edad y la altura de un niño.

II. Analiza y contesta lo que se pide en cada caso.

1) El precio de un bolígrafo es de $8.5, ¿cuántos bolígrafos se pueden comprar con $50?

2) Abril tarda 38 minutos en recorrer 5 Km, siguiendo el mismo ritmo, ¿cuánto tardará en recorrer 2 km?, ¿cuál es el valor de la constante de proporcionalidad?

3) Un plano de una casa, hecho a escala 1:100, una habitación viene representada por un rectángulo de 5cm x 3cm ¿Cuál es su superficie real?

4) A las 12:00 pm un árbol proyecta una sombra de 1.5 metros. Al mismo tiempo un poste de 1.3 metros proyecta una sombra de 30 cm. ¿Cuál es la altura del árbol?, ¿cuál es el valor de la constante de proporcionalidad?

5) Durante una tormenta vemos el rayo antes de oír el trueno, porque la luz viaja a mayor velocidad que el sonido. La distancia entre tu posición y el centro de la tormenta varía directamente con el tiempo que pasa entre el rayo y el trueno.
a) Suponiendo que el trueno de una tormenta cuyo centro está a 1650 metros de distancia, tarda 5 segundos en alcanzar al rayo, determina la constante de proporcionalidad.
b) ¿Cuánto tardará el sonido de un trueno en alcanzar a un rayo cuyo centro de la tormenta está 2574 metros de distancia?

2.1.2 Identificación de las variables dependiente e independiente en situaciones concretas.

Aprendizaje.
El alumno identifica cuál es la variable cuyos valores dependen de los que tome la otra.

Se ha trabajado el concepto de *razón* y *proporción* con cantidades fijas, pero tanto en la ciencia, en el comercio y en muchas otras situaciones como en los ejercicios anteriores se consideran relaciones entre dos cantidades que varían (***variables***) de alguna forma. Otras variaciones son:

1. La presión en sus oídos mientras nada bajo el agua está en función de la profundidad a la cual está nadando.

2. La intensidad de la luz desde lo alto de tu escritorio está en función del cuadrado de la distancia entre tu escritorio y la fuente de luz.

3. La distancia de barrido después de aplicar el freno está en función del cuadrado de la distancia a la cual se está viajando.

Todas estas llamadas *relaciones funcionales* están basadas en el hecho de que a medida que varía una cantidad, alguna otra cantidad varía de una manera predecible, a estas medidas o cantidades que varían de alguna forma se les llama **variables**. De estas cantidades el valor de una depende de la otra, veámoslo en los siguientes ejemplos.

Señalaremos las variables involucradas en los 6 ejercicios antes vistos, así como la variable independiente y la dependiente.

1) Si un chicle cuesta 50 centavos, ¿cuánto cuestan 8 chicles?

Las cantidades que varían (**variables**) son el número de chicles y el costo, donde el costo depende del número de chicles de que se trate.
Variable independiente: el número de chicles.
Variable dependiente: el costo.

2) Abril tarda 25 minutos en recorrer 3 Km, siguiendo el mismo ritmo, ¿cuánto tardará en recorrer 2 km?

Las cantidades que varían (**variables**) son el número de kilómetros y el tiempo, donde el tiempo depende del número de kilómetros que se recorran.
Variable independiente: el número de kilómetros.
Variable dependiente: el tiempo.

3) En las instrucciones de un determinado medicamento se lee que por cada 5 kg de peso de una persona han de tomarse 3 mg al día. Si una persona enferma pesa 60 kg, ¿cuántos mg ha de tomar?

Las cantidades que varían (**variables**) son el peso de la persona y la cantidad de medicamento que ha de tomar, donde la cantidad de medicamento depende del peso de la persona.
Variable independiente: el peso de la persona.
Variable dependiente: la cantidad de medicamento.

4) Si en un paquete de galletas cuyo contenido es de 40 gr. dice que te proporciona 172 kilocalorías, ¿cuántas kilocalorías te proporcionarán 10 gr de las mismas galletas?

Las cantidades que varían (**variables**) son el contenido de galletas y las kilocalorías que proporcionan, donde las kilocalorías dependen del contenido de galletas.
Variable independiente: contenido de galletas.
Variable dependiente: las kilocalorías que proporcionan.

5) El alargamiento que sufre un resorte varía directamente con el peso que cuelga de él. Si un peso de 12 gr estira un resorte 3 centímetros, ¿cuántos gramos se necesitan para estirar el resorte 5 cm? y ¿cuál es la constante de variación o de proporcionalidad?

Las cantidades que varían (**variables**) son el alargamiento del resorte y el peso que cuelga de él, donde el alargamiento del resorte depende del peso que cuelga de él.
Variable independiente: el peso que cuelga del resorte.
Variable dependiente: el alargamiento del resorte.

6) En una explotación ganadera para la alimentación diaria de 30 terneras se necesitan 210 kg. de alimento. Los dueños van a ampliar el ganado con 20 reses más y calculan las nuevas necesidades alimenticias. ¿Cuánto alimento tendrán que comprar para las 50 terneras?

Las cantidades que varían (**variables**) son el número de terneras y la cantidad de alimento, donde la cantidad de alimento depende del número de terneras.
Variable independiente: el número de terneras.
Variable dependiente: la cantidad de alimento.

La variable independiente se llama x y a la variable dependiente y.

Ejercicios 2.1.2

En cada una de las siguientes situaciones de variación directamente proporcional contesta lo que se pide, además, indica cuál es la variable independiente y la dependiente.

1) La razón de chicos a chicas en una clase es de 2 a 3. Hay 12 chicos ¿cuántas chicas hay?

2) Un paquete de 500 gramos de caramelos se vende a $50. ¿A qué precio se debe vender un paquete de 300 gramos? (se supone que es del mismo tipo de caramelos y al mismo precio unitario)

3) Un coche por carretera tiene un consumo medio de 5 litros de gasolina por cada 100 km. Si el coche recorre 250 km. en las mismas condiciones, ¿cuántos litros se prevé que consuma?

4) Si 5 Kg. de arroz cuestan $70. ¿Cuánto cuestan 7 Kg?

5) Luis y Andrés se reparten $125 en la razón 2:3. ¿Cuál es la diferencia entre lo que recibe cada uno de ellos?

6) En el grupo de Karen hay 27 alumnos, si 12 son hombres, la razón entre mujeres y hombres es:

7) Las edades de Mitsi y Ángel están en la razón 5:3. Si Mitsi tiene 10 años, ¿cuántos años suman sus edades?

8) ¿Cuánto cuestan 54 m de alambre, si 5 m cuestan $ 12?

9) Por el consumo de 250 metros cúbicos de gas se pagan $1500. ¿Cuánto se pagará por un consumo de 40 metros cúbicos?

10) Si un decalustro tiene 50 años, ¿qué fracción del decalustro representa 20 años?

NOTA: para reforzar este tema sigue practicando en el banco de reactivos.

2.1.3 Variación proporcional entre dos cantidades.

Aprendizajes.
El alumno:
1) Obtiene el Modelo Algebraico correspondiente.
2) Obtiene los valores que se indiquen de **y** *o de* **x**, *auxiliándose del reconocimiento de patrones o de la regla de tres.*

Si x y y denotan dos cantidades, decimos que y es **directamente proporcional** a x, ó y varía directamente conforme a x, si existe una constante de proporcionalidad k distinta a cero, tal que $\frac{y}{x} = k$ o su equivalente $y = kx$.

Ejemplos:

Escribe el Modelo Algebraico o la ecuación que definen cada una de las siguientes variaciones:

1) M es directamente proporcional a R.
Solución:
Aplicando la definición, existe una constante de proporcionalidad $k \neq 0$, tal que M = kR. Así, el Modelo Algebraico es M = kR.

2) w varía directamente con s.
Solución:
Aplicando la definición, existe una constante de proporcionalidad $k \neq 0$, tal que w = ks. Así, el Modelo Algebraico es w = ks.

3) F varía directamente con el cuadrado de v.
Solución:
Aplicando la definición, existe una constante de proporcionalidad $k \neq 0$, tal que F = kv^2. Entonces, el Modelo Algebraico es F = kv^2.

4) H es directamente proporcional al cubo de h.

Solución:
Aplicando la definición, existe una constante de proporcionalidad $k \neq 0$, tal que $H = kh^3$. Es decir, el Modelo Algebraico es $H = kh^3$.

5) G varía conjuntamente con respecto a m y s.
Nota: Una cantidad **varía conjuntamente** con dos o más cantidades si es igual a una constante por el producto de estas.
Solución:
Usando lo de la nota, G varía conjuntamente con m y s si $G = kms$, con $k \neq 0$. Entonces, el Modelo Algebraico es $G = kms$.

6) E es proporcional a m y a c^2.
Solución:
Usando lo de la nota, E varía conjuntamente con m y c^2 si $E = kmc^2$, con $k \neq 0$. Entonces, el Modelo Algebraico es $E = kmc^2$.

7) La producción de tortillas T es directamente proporcional al tiempo t que funciona la máquina.
Solución:
Haciendo abstracción tenemos que T es directamente proporcional a t, es decir, el Modelo Algebraico es $T = kt$, con $k \neq 0$.

8) La potencia P de un motor a gasolina es directamente proporcional al volumen total de barrido por los pistones del motor, llamado la cilindrada c del motor.
Solución:
Tenemos que P es directamente proporcional a c, entonces, el Modelo Algebraico es $P = kc$, con $k \neq 0$.

9) El tiempo t que emplea un planeta para dar una revolución completa alrededor del Sol, varía directamente con el cubo de su distancia promedio d hasta el Sol.
Solución:
La variación es: t es directamente proporcional a d^3, es decir, el Modelo Algebraico es $t = kd^3$, con $k \neq 0$.

10) El volumen V de una caja rectangular varía conjuntamente con su longitud l, su ancho a y su altura h.
Solución:
Tenemos una variación conjunta que es: V es directamente proporcional a l, a y h, es decir, el Modelo Algebraico es $V = klah$, con $k \neq 0$.

Con la expresión “regla de tres” se designa un procedimiento que se aplica a la resolución de problemas de proporcionalidad en los cuales se conocen tres de los cuatro datos que componen la proporción y se requiere calcular el cuarto. Se debe de tener cuidado con los datos del problema, ya que esta regla sólo es válida cuando se trata de una proporcionalidad directa que no sea compuesta, es decir, simple.

La regla de tres la podemos ver de la siguiente forma:

$\boldsymbol{a}$ es a $\boldsymbol{b}$, como

$\boldsymbol{c}$ es a $\boldsymbol{x}$, es decir, $\boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{bc}}{\boldsymbol{a}}$

Ejemplos:

1) Si un chicle cuesta 50 centavos, ¿cuánto cuestan 8 chicles?

Solución:

1 es a 50, como
8 es a p

Esto se representa por $p = \dfrac{50 \times 8}{1}$ = ¢400 = $4

2) Abril tarda 25 minutos en recorrer 3 Km, siguiendo el mismo ritmo, ¿cuánto tardará en recorrer 2 km?

Solución:

25 es a 3, como
t es a 2

Esto se representa por $t = \dfrac{25 \times 2}{3}$ = 16.666 minutos

3) En las instrucciones de un determinado medicamento se lee que por cada 5 kg de peso de una persona han de tomarse 3 mg al día. Si una persona enferma pesa 60 kg, ¿cuántos mg ha de tomar?

Solución:

5 es a 3, como
60 es a m

Esto se representa por $m = \dfrac{60 \times 3}{5}$ = 36 mg al día

4) Si en un paquete de galletas cuyo contenido es de 40 gr dice que te proporciona 172 kilocalorías, ¿cuántas kilocalorías te proporcionarán 10 gr. de las mismas galletas?

Solución:

40 es a 172, como
10 es a c

Es decir, $c = \frac{10 \times 172}{40}$ = 43 kilocalorías.

5) El alargamiento que sufre un resorte varía directamente con el peso que cuelga de él. Si un peso de 12 gramos estira un resorte 3 centímetros, ¿cuántos gramos se necesitan para estirar el resorte 5 cm? y ¿cuál es la constante de variación o de proporcionalidad?

Solución:

3 es a 12, como
5 es a g

Entonces, $g = \frac{5 \times 12}{3}$ = 20 gr.

6) y es directamente proporcional a x, si y = 12 cuando x = 15, encuentra el valor de x cuando y = 16.

Solución 1: Usando la "regla de tres"

12 es a 15, como
16 es a x

Esto se representa como $x = \frac{16 \times 15}{12} = 20$

Solución 2: Usando la constante de proporcionalidad "k"

Como y es directamente proporcional a x, existe una k $\neq$ 0 tal que $y = kx$.
Sustituyendo los datos dados tenemos 12 = k (15), despejando k.

$$\frac{12}{15} = k \quad \text{que es lo mismo que} \quad k = \frac{4}{5}$$

Por otro lado, 16 = $\frac{4}{5}x$, despejando a "x" se tiene x = 20.

7) y es directamente proporcional al cubo de x, si y = 120 cuando x = 8, encuentra el valor de y cuando x = 5.

Solución:

En este caso no se puede usar la "regla de tres", ya que la variación proporcional **no es simple**, buscaremos la constante de proporcionalidad "k".

Como y es directamente proporcional al cubo de x, existe una $k \neq 0$ tal que, $y = kx^3$. Sustituyendo los datos dados tenemos 120 = k (8^3), despejando k.

$$k = \frac{120}{8^3} = \frac{15}{64}$$

Por otro lado se pide el valor de y cuando x = 5, como ya se sabe el valor de k, sustituyendo en el modelo anterior: $y = \frac{15}{64}(5^3) = \frac{1875}{64}$, es decir, y = 29.2969

a) Uso de tablas y gráficas.

Aprendizajes.
El alumno:
1) Identifica en una gráfica los datos de la tabla correspondiente y construye la gráfica relacionada a los valores de una tabla dada.
2) Localiza en el plano cartesiano los puntos asociados a los datos que posee y traza la gráfica.
3) A partir del análisis de la gráfica, obtiene información de la situación a la que representa y lo expresa verbalmente.

Analiza los siguientes ejemplos donde el uso de tablas y gráficas te ayudan para resolver varios problemas de variación proporcional directa.

Ejemplo 1) Una lata de pintura de 4 litros indica que rinde para pintar una superficie de 16 metros cuadrados, aproximadamente.

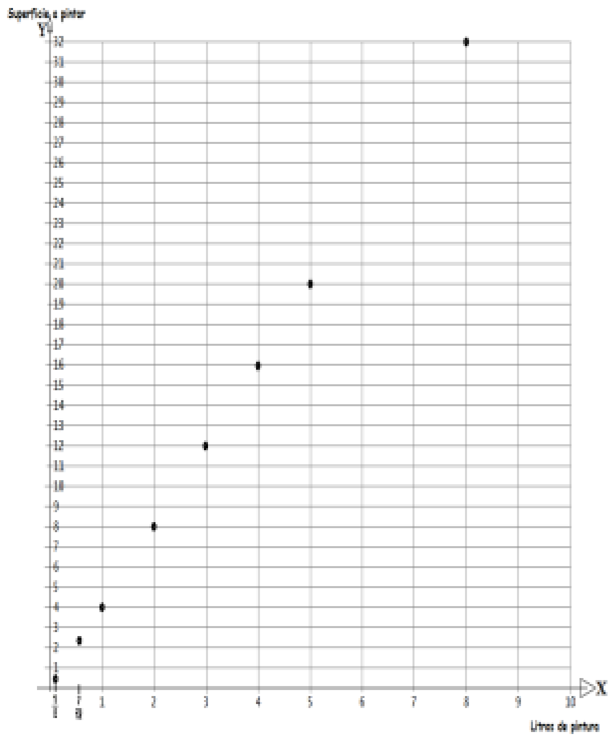
La siguiente tabla muestra la cantidad de pintura necesaria para pintar determinada superficie, ¿representa una variación proporcional directa?, encuentra el Modelo Algebraico y trazar su gráfica.

Litros necesarios de pintura	4	8	2	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{12}$	3	5
Superficie a pintar (m^2)	16	32	8	4	½	$\frac{7}{3}$	12	20

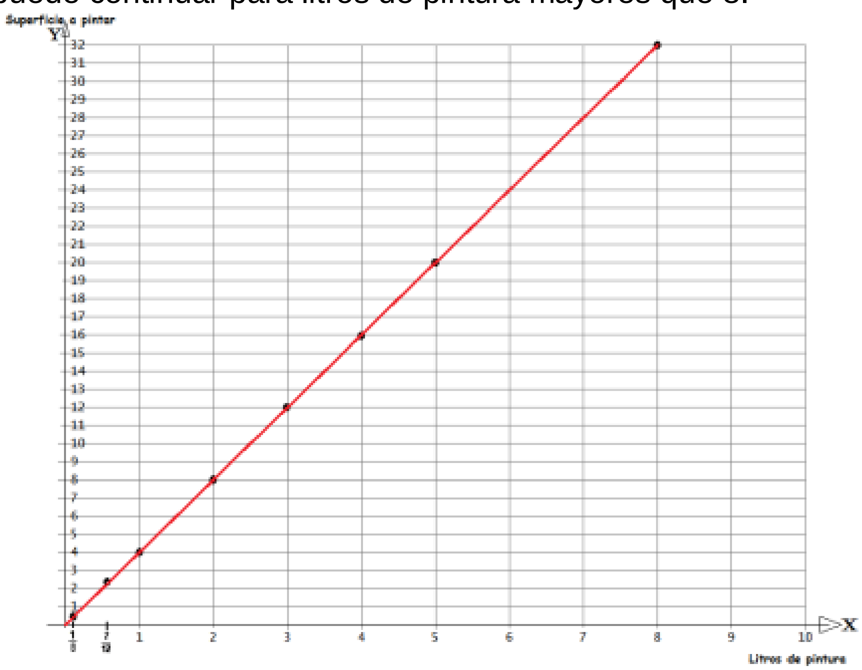
Análisis: La superficie a pintar es directamente proporcional a la cantidad de litros de pintura, puesto que:
Para pintar el doble de superficie se necesita el doble de litros de pintura; para la mitad de superficie se necesita la mitad de litros; para la cuarta parte de superficie, la cuarta parte de pintura, etc.
Además, si se multiplica cada valor del 1^{er} renglón por 4, se obtiene su correspondiente valor del 2º renglón.
Otra forma de verlo: Al dividir cada valor del segundo renglón entre su correspondiente valor del primer renglón el resultado siempre es 4. Este número es la **constante de proporcionalidad**, de aquí qué el **Modelo Algebraico** es

$$y = 4x$$

La representación gráfica de este comportamiento se puede apreciar en un plano cartesiano, donde en el eje X se encuentran los litros necesarios de pintura (variable independiente) y en el eje Y la superficie a pintar (variable dependiente).



Observa que el número de litros de pintura puede tomar valores con decimales, lo mismo con la superficie a pintar. Entonces podemos unir los puntos, y la gráfica que resulta es una recta que inicia en el origen de coordenadas, además, la gráfica se puede continuar para litros de pintura mayores que 8.



Observación: Como las unidades sobre el eje X tienen una longitud mayor que las del eje Y, la recta resultante queda modificada, ya que debe ser más vertical.

Ejemplo 2) Una bomba de agua llena en 20 minutos un tinaco de 800 litros de capacidad.
Nota: Considerar el tinaco de agua vacío.

La siguiente tabla muestra el contenido de agua en diversos tiempos, si piden completarla se procede de la siguiente forma:

Tiempo t	0	1	2	3	6	10.5	15	18.8	20
Contenido c(t)	0	40	80	120	240	420	600	752	800

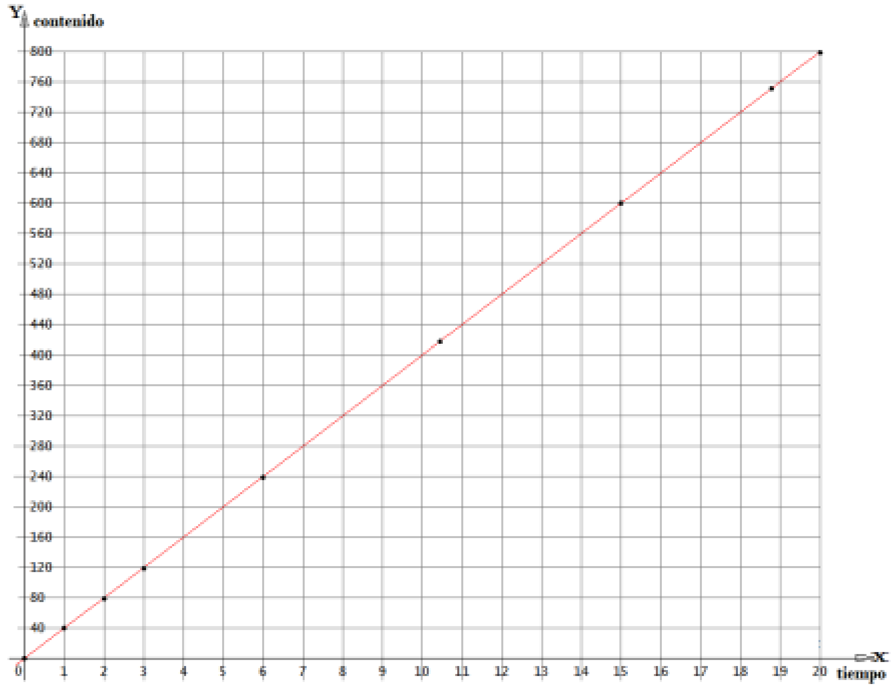
Análisis:
1º) Se calcula el contenido del tinaco en el primer minuto, para esto hacemos $\frac{800}{20}$ = 40 litros.
2º) En dos minutos se hace 40(2) = 80 litros de agua contiene el tinaco.
3º) En tres minutos 40(3) = 120 litros.
4º) Para saber en cuantos minutos el tinaco contiene 240 litros se hace $\frac{240}{40}$ = 6.
5º) Cuando el contenido es 420 litros es en $\frac{420}{40}$ = 10.5 minutos.
6º) En 15 minutos el contenido del tinaco es 40(15) = 600 litros.
7º) En 18.8 minutos el contenido es de 40(18.8) = 752 litros.
8º) En 20 minutos el contenido del tinaco es de 800 litros.

Esta relación es proporcional ya que si se multiplica cada valor del 1er renglón por 40, se obtiene su correspondiente valor en el 2º renglón.
Otra forma de verlo: Al dividir cada valor del segundo renglón entre su correspondiente valor del primer renglón el resultado siempre es 40. Este número es la **constante de proporcionalidad**, de aquí que el **Modelo Algebraico** es:

$$y = 40x$$

La representación gráfica de este comportamiento se puede apreciar en un plano cartesiano, donde en el eje X se encuentran el tiempo (variable independiente) y en el eje Y el contenido del tinaco (variable dependiente).

En este caso también se pueden unir los puntos mediante una línea recta ya que tanto el **tiempo** como el **contenido** del tinaco pueden tomar valores con decimales, las variables que tienen esta característica se les llama **variables continuas**.
Esta gráfica también se puede continuar para mayor tiempo, pero al tinaco sólo le caben 800 litros, entonces después de 20 minutos el tinaco contendrá 800 litros hasta que se apague la bomba.



Observación: Como las unidades sobre el eje X van de 1 en 1 y las del eje Y van de 40 en 40, la recta resultante queda modificada, ya que debe ser casi vertical.

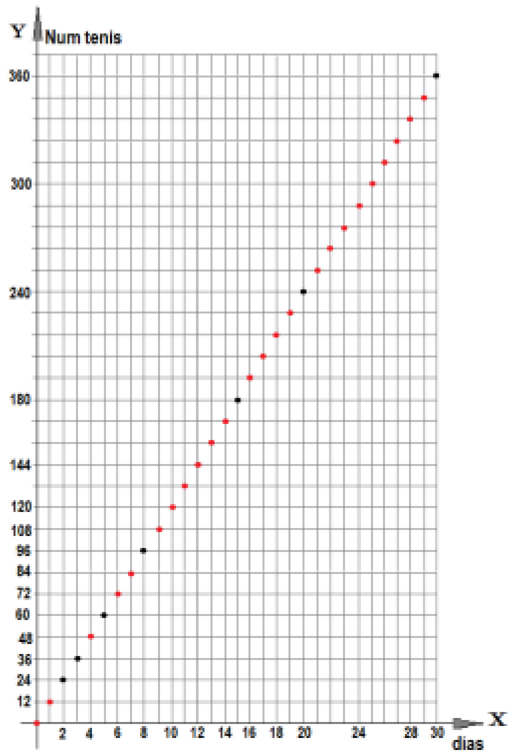
Ejemplo 3) La siguiente tabla muestra el número de tenis que produce una fábrica de zapatos durante un mes.

Días	2	3	5	8	15	20	30
Número de tenis	24	36	60	96	180	240	360

Análisis:
Esta relación es proporcional ya que si se multiplica cada valor del 1er renglón por 12, se obtiene su correspondiente valor en el 2º renglón.
Otra forma de verlo: Al dividir cada valor del segundo renglón entre su correspondiente valor del primer renglón el resultado siempre es 12. Este número es la **constante de proporcionalidad**, de esto se deduce qué el **Modelo Algebraico** es

$$y = 12x$$

Su representación gráfica en un plano cartesiano es la siguiente:



En este ejercicio el tiempo que se mide en días representa la variable independiente y la producción de tenis a la variable dependiente. Además en la gráfica no se unen los puntos, porque el ejercicio se refiere al número de días y de tenis completos, no fracciones de ellos. A este tipo de variables se les llama **variables discretas** porque sólo admiten valores enteros.

b) Análisis del cociente $\frac{y}{x}$ para varias parejas de valores.

Aprendizaje:
El alumno compara diversos valores de y con los correspondientes de **x (y/x)** *y observa la liga con la constante de proporcionalidad.*

En muchas ocasiones la variación proporcional se presenta sólo en tablas, como se puede ver en los siguientes ejercicios.

1) Mostrar si la relación entre los números de la siguiente tabla, representa una variación proporcional. También, dar el Modelo Algebraico que lo representa y traza su gráfica.

x	– 2	– 1	1	2	3
y	–10	– 5	5	10	15

Análisis:
Para ver si representa o no una variación proporcional directa, se divide cada valor del 2º renglón (y) entre su correspondiente valor del 1er renglón (x).

Es decir, calculamos el cociente $\frac{y}{x}$ para cada columna de la tabla.

$\frac{-10}{-2} = 5$ $\frac{-5}{-1} = 5$ $\frac{5}{1} = 5$ $\frac{10}{2} = 5$ $\frac{15}{3} = 5$

Como todos los cocientes dan el mismo resultado, se afirma que **sí** representa una variación proporcional directa y la constante de proporcionalidad es 5, de esto se concluye que el Modelo Algebraico es $y = 5x$. En su gráfica, se unen los puntos porque las variables pueden tomar cualquier valor, sea entero o no.

2) Los valores de la siguiente tabla ¿representan una variación directamente proporcional? Determinar la variable independiente y la dependiente, así como, su Modelo Algebraico y traza su gráfica.

x	– 2	– 1	0	1	2	3
y	–1	0	1	2	3	4

Análisis:

Para ver si representa o no una variación proporcional directa, se divide cada valor del 2º renglón (y) entre su correspondiente valor del 1er renglón (x).

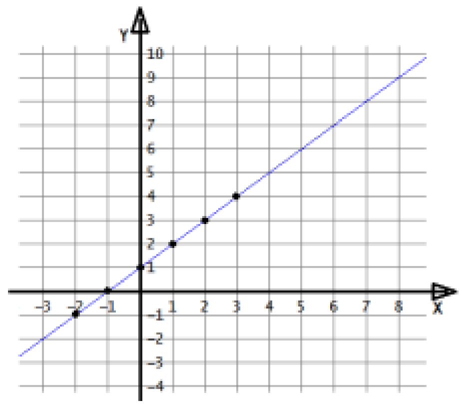
Es decir, calculamos el cociente $\frac{y}{x}$ para cada columna de la tabla.

$\frac{-1}{-2} = ½$ $\frac{0}{-1} = 0$

Como dos resultados de los cocientes son diferentes, se concluye que los valores de la tabla **no** están en variación directamente proporcional.

Para determinar el Modelo Algebraico hay que analizar la relación entre los valores de x y de y, esto es, se observa que "cada valor del 2º renglón es una unidad mayor que su correspondiente valor del 1er renglón". Entonces, su Modelo Algebraico es $y = x + 1$.

Donde x es la variable independiente y y la variable dependiente, gráficamente se unen los puntos porque las variables pueden tomar cualesquiera valores, ya sean enteros o con decimales.



3) Los valores que se muestran en la siguiente tabla ¿representan una variación directamente proporcional? Determinar la variable independiente y la dependiente, así como, el Modelo Algebraico y traza su gráfica.

x	-6	-2	1	3	5	7
y	$\frac{12}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{6}{5}$	-2	$-\frac{14}{5}$

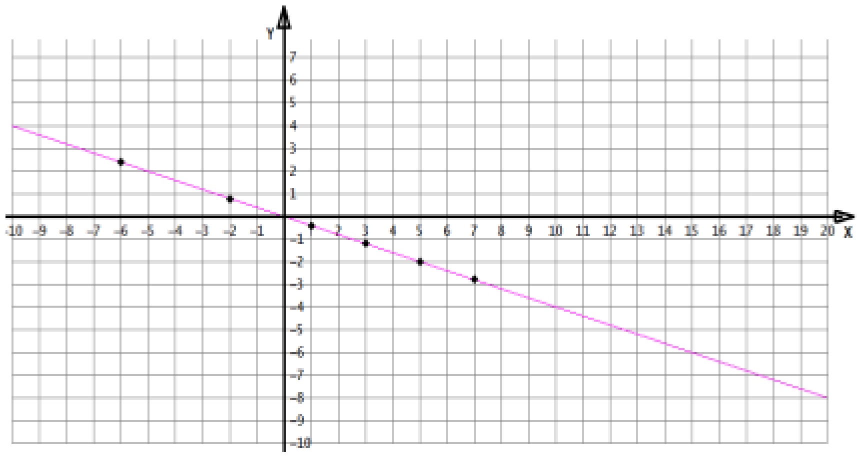
Análisis:

Haciendo los cocientes $\frac{y}{x}$ para cada columna de la tabla:

$$\frac{\frac{12}{5}}{-6} = -\frac{12}{30} = -\frac{2}{5} = -0.4 \qquad \frac{\frac{4}{5}}{-2} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} = -0.4 \qquad \frac{-\frac{2}{5}}{1} = -\frac{2}{5} = -0.4$$

$$\frac{-\frac{6}{5}}{3} = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5} = -0.4 \qquad -\frac{2}{5} = -0.4 \qquad \frac{-\frac{14}{5}}{7} = -\frac{14}{35} = -\frac{2}{5} = -0.4$$

Como todos los cocientes dan el mismo resultado, se afirma que los valores de y están en variación directamente proporcional con los de x, y la constante de proporcionalidad es $-\frac{2}{5} = -0.4$, de esto se concluye que el Modelo Algebraico es $y = -\frac{2}{5}x$. Gráficamente se unen los puntos porque las variables pueden tomar cualesquiera valores, ya sean enteros o con decimales.



Una observación muy importante que se debe tomar en cuenta es:

La gráfica que representa a una variación proporcional directa es una línea recta o un conjunto de puntos alineados y debe de pasar por el origen de coordenadas, y su Modelo Algebraico es $y = kx$.

c) Constante de Proporcionalidad.

Aprendizaje.

El alumno obtiene o identifica, según el caso, la constante de proporcionalidad.

¿Cómo identifico la constante de proporcionalidad en una variación directamente proporcional en general?

En situaciones problemáticas:

Ejemplo 1) El alargamiento que sufre un resorte varía directamente con el peso que cuelga de él. Si un peso de 15 gramos estira un resorte 2 centímetros, ¿cuántos centímetros se estirará el mismo resorte con un peso de 80 gramos?

Solución:

Aplicando la "regla de tres" se obtiene: 10.666 cm.

La constante de proporcionalidad se calcula reduciendo a la unidad, es decir, se divide 15 entre 2. En símbolos, $k = \frac{15}{2} = 7.5$

Ejemplo 2) Si 4 libras de fertilizante cubren 50 pies cuadrados de jardín, ¿cuántas libras se necesitan para 225 pies cuadrados?

Solución:

Aplicando la "regla de tres" se obtiene: 18 libras.

La constante de proporcionalidad es $k = \frac{50}{4} = 12.5$ (reduciendo a la unidad)

Cuando se tiene una tabla:

Ejemplo 3) Los valores dados en la siguiente tabla están en variación directamente proporcional, encuentra la constante de proporcionalidad.

x	– 2	– 1	1	2	3
y	–24	–12	12	24	36

Solución:
Cuando los valores se encuentran en una tabla, la constante de proporcionalidad es $k = \frac{y}{x}$, para cualquier columna. En este caso, $k = \frac{-24}{-2} = 12$

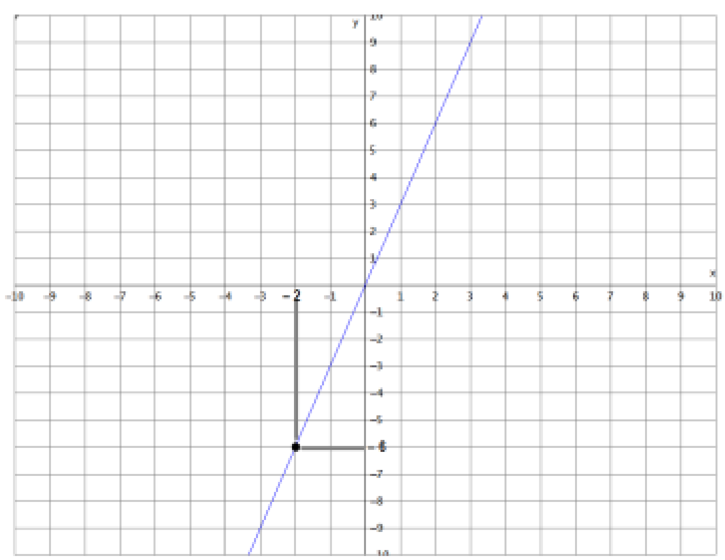
Ejemplo 4) Los valores dados en la siguiente tabla están en variación directamente proporcional, encuentra la constante de proporcionalidad.

x	– 9	– 6	12	18	27
y	–3	–2	4	6	9

Solución:
Cuando los valores se encuentran en una tabla, la constante de proporcionalidad es $k = \frac{y}{x}$, para cualquier columna. En este caso, $k = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

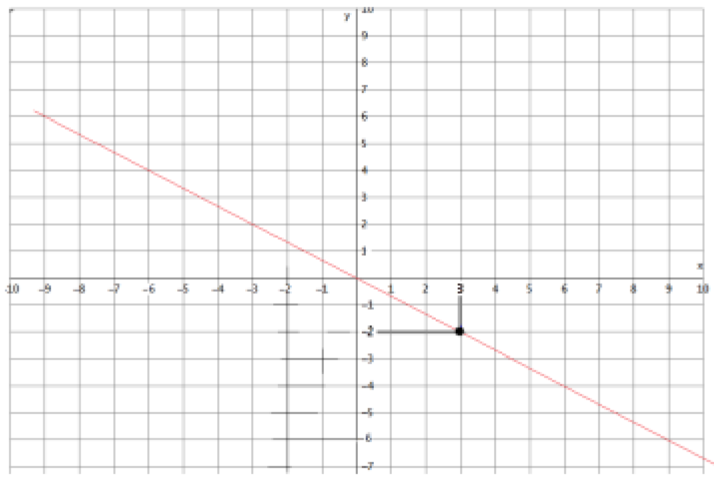
Cuando se da una gráfica:

Ejemplo 5) Determina la constante de proporcionalidad y el Modelo Algebraico en la siguiente gráfica.



Solución:
Esta gráfica es la representación de una variación directamente proporcional, ya que "la gráfica es una línea recta que pasa por el origen". Al igual que en una tabla, se divide cualquier valor del eje Y entre su correspondiente valor del eje X.
Por ejemplo, si se elige – 6 en el eje Y, le corresponde el – 2 en el eje X, formando así el cociente $\frac{-6}{-2}$ = 3. Por lo tanto, la constante de proporcionalidad es k = 3.

Ejemplo 6) Determina la constante de proporcionalidad y el Modelo Algebraico en la siguiente gráfica.



Solución:
Esta gráfica es la representación de una variación directamente proporcional, al igual que en una tabla, se divide cualquier número del eje Y entre su correspondiente número del eje X, de preferencia enteros.
Eligiendo por ejemplo el – 2 en el eje Y, le corresponde el 3 en el eje X, formando así el cociente $\frac{-2}{3}$. Como ya no se puede reducir $k = -\frac{2}{3}$.
El Modelo algebraico es $y = -\frac{2}{3}x$.

Ejercicios 2.1.3

I. Escribe el modelo que representa cada uno de los siguientes enunciados, usa k como la constante de proporcionalidad, y contesta lo que se pide en cada caso.

1) La frecuencia f de la cuerda de una guitarra de una longitud dada varía directamente como la raíz cuadrada de la tensión T de la cuerda.
2) Los geólogos han encontrado, en estudios sobre la erosión de la tierra que la fuerza erosiva P de una corriente rápida de agua varía directamente como la sexta potencia de la velocidad v del agua.

3) G varía conjuntamente como x y el cuadrado de y.
4) El volumen de un cono varía conjuntamente como su altura h y el cuadrado del radio de su base.
5) La cantidad de calor que despide un electrodoméstico (en calorías) varía conjuntamente como el tiempo t, la resistencia R en el circuito y el cuadrado de la corriente I.
6) La energía cinética E de un cuerpo en movimiento es directamente proporcional a su peso W y al cuadrado de su velocidad v.
7) A es directamente proporcional a B y C . Si $A = 42$ cuando $B = 2$ y $C = 7$, hallar A cuando $B = 7$ y $C = 4$.
8) y es directamente proporcional al cubo de x. Si $y = 50$ cuando $x = 3$, encuentra y cuando $x = 4$.
9) Si p varía directamente con el cubo de q, y $p = 40$ cuando $q = 2$, encuentra el valor de p cuando $q = \frac{4}{5}$.
10) a es directamente proporcional a b y c. Si $a = 24$ cuando $b = 2$ y $c = 4$, hallar a cuando $b = \frac{7}{3}$ y $c = 5$.

II. Para las siguientes tablas decir cuáles representan una Variación Directamente Proporcional, y cuáles no, justifica tu respuesta. Determina su Modelo Algebraico.

1)

x	1	2	3	4	5	6
y	7	10	13	16	19	22

2)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2	4	6	8	10	12	14

3)

x	1	2	3	4	5	6
y	1	3	5	7	9	11

4)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	15	27	39	51	63	75

5)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1/5	2/5	3/5	4/5	1	6/5	7/5

6)

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0	3	8	15	24	35	48

7)

x	– 2	– 1	1	2	3
y	0	1	3	4	5

8)

x	– 2	– 1	1	2	3
y	– 6	– 3	3	6	9

9)

x	– 2	– 1	1	2	3
y	–10	– 5	5	10	15

10)

x	– 4	– 2	2	3	4
y	17	5	5	10	17

11)

x	*y*
-9	-17
-6	-11
18	37
27	55

12) Completa la siguiente tabla de valores directamente proporcionales y determina el valor de la constante de proporcionalidad:

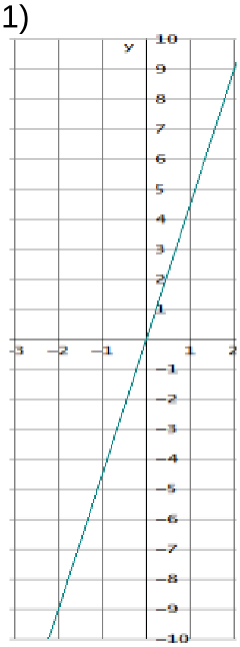
0,4	0,1	1	5	7	10
2	0,5				

13) Se sabe que la constante de proporcionalidad de dos magnitudes es 0,4. Completa la siguiente tabla de proporcionalidad:

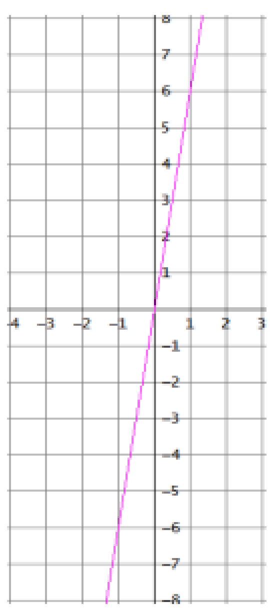
MAGNITUD A	3				1		7	3		12
MAGNITUD B		4	2	8		5			1	

III. ¿Cuáles de las siguientes gráficas representan una variación directamente proporcional? Determina su constante de proporcionalidad, y escribe el Modelo Algebraico para cada una.

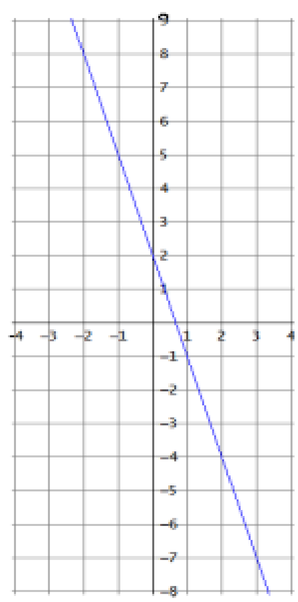
1)



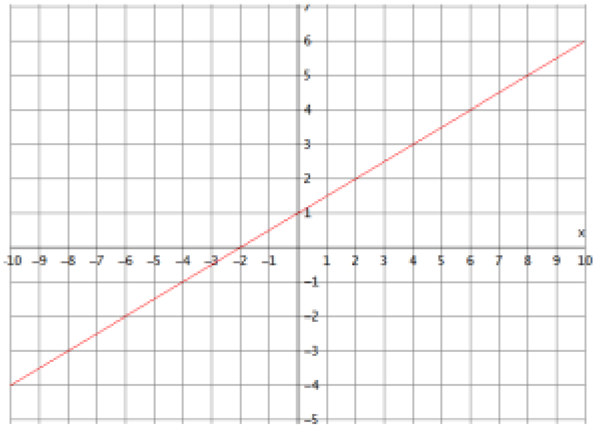
2)



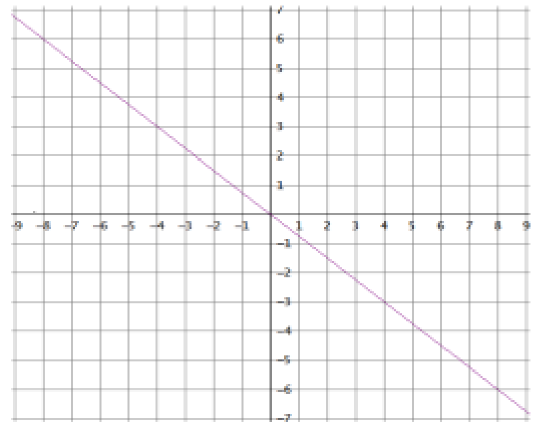
3)



4)



5)



NOTA: para reforzar este tema sigue practicando en el banco de reactivos.

2.1.4 Problemas de variación proporcional directa.

Aprendizajes.
El alumno:
1) Redacta el contexto de una situación que corresponda a un modelo de variación proporcional que se le proporcione. O bien, modifica la redacción, cuando se introduzcan cambios en el modelo de una situación dada.
2) Obtiene el Modelo Algebraico correspondiente.

Ejemplos resueltos:

Ejemplo 1) La presión total *P* del viento sobre una pared varía conjuntamente como el área *A* de la pared y el cuadrado de la velocidad del viento v. Si $P = 120$ libras cuando $A = 100$ pies cuadrados y $v = 20$ millas por hora, encontrar *P* si $A = 200$ pies cuadrados y $v = 30$ millas por hora.

Solución:
Modelo Algebraico: $P = k\,A\,v^2$
Si $P = 120$ cuando $A = 100$ y $v = 20$, sustituyendo en el modelo: $120 = k100(20)^2$
Despejando a k: $120 = k(40000) \Rightarrow \frac{120}{40000} = k \Rightarrow k = \frac{3}{1000} = 0.003$
Por otro lado, si $A = 200$ y $v = 30$, encontrar P. Sustituyendo en el Modelo Algebraico $P = k\,A\,v^2$: $P = 0.003(200)(30)^2 \Rightarrow P = 540$ libras.

Ejemplo 2) El volumen de una pirámide es directamente proporcional a su altura y al área de su base. El volumen de una pirámide es 96 m^3, su altura es 8 m y el área de su base 36 m^2, ¿cuál será el volumen de una pirámide cuya altura es 12 m y el área de su base 64 m^2

Solución:
Modelo Algebraico: V = k h A
Si V = 96 cuando h = 8 y A = 36, sustituyendo en el modelo: 96 = k(8)(36)
Despejando a k: $96 = k(288) \Rightarrow \frac{96}{288} = k \Rightarrow k = \frac{1}{3}$
Por otro lado, si h = 12 y A = 64, encontrar V. Sustituyendo en el Modelo Algebraico V = k h A: $V = \frac{1}{3}(12)(64) \Rightarrow V = 256\ m^3$

Ejemplo 3) En un triángulo sus ángulos son proporcionales a los números 8, 10 y 12. ¿Cuánto mide cada ángulo?

Solución:
La suma de los tres ángulos interiores en cualquier triángulo es de 180º.
En este caso los tres ángulos son proporcionales a 8, 10 y 12, es decir, tenemos un total de 8 + 10 + 12 = 30 partes iguales.
Entonces, los ángulos proporcionales a estos números son:

Ángulo $A = \frac{8}{30}(180^{\circ}) = 48^{\circ}$ Ángulo $B = \frac{10}{30}(180^{\circ}) = 60^{\circ}$

Ángulo $C = \frac{12}{30}(180^{\circ}) = 72^{\circ}$ y $48^{\circ} + 60^{\circ} + 72^{\circ} = 180^{\circ}$

Comprobación: 48º, 60º y 72º son proporcionales a 8, 10 y 12 respectivamente. Ya que $\frac{48}{8} = 6$; $\frac{60}{10} = 6$ y $\frac{72}{12} = 6$, la constante de proporcionalidad es 6.

Ejercicios 2.1.4

Resuelve cada uno de los siguientes problemas, determinando su variable independiente y la dependiente, la constante de proporcionalidad k y su Modelo Algebraico.
1) El área de un cuadrado es directamente proporcional al cuadrado de su diagonal. Hallar la fórmula del área de un cuadrado en función de la diagonal, sabiendo que el área de un cuadrado cuya diagonal mide 8 cm es 32 cm^2.

2) La ley de Hooke para un resorte establece que el tamaño de su alargamiento (o compresión) varía directamente según sea la fuerza que se le aplique. Una fuerza de 20 libras alarga el resorte 4 pulgadas.
   a) Escribe una ecuación que relacione la distancia alargada con la fuerza aplicada.

b) ¿Cuánto alargará el resorte una fuerza de 30 libras?

3) La distancia que una bola rueda por un plano inclinado es directamente proporcional al cuadrado del tiempo que rueda. Durante el primer segundo la bola rueda 50 cm.

a) Escribir una ecuación que relacione la distancia recorrida con el tiempo.
b) ¿Qué distancia recorrerá la bola en los primeros 4 segundos?

4) El interés simple para cierta cuenta de ahorros es directamente proporcional al tiempo y al capital. Después de tres meses, el interés sobre el capital $5000 es $120.

a) Escribe una ecuación que relacione interés, capital y tiempo.
b) Hallar el interés después de tres trimestres.

Nota: El diámetro de una partícula movida por el agua de un arroyo varía aproximadamente como el cuadrado de la velocidad del agua.

5) Un arroyo cuyas aguas tienen una velocidad de ¼ de milla por hora mueve partículas de grava cuyo diámetro es alrededor de 0.02 pulgadas. ¿Cuál debe ser la velocidad para que mueva partículas con un diámetro de 0.12 pulgadas?

6) Un arroyo de aguas con velocidad v puede mover partículas de diámetro d o menos. ¿Por qué factor aumenta d cuando la velocidad se duplica?

7) El área de un círculo es proporcional al cuadrado del radio. Si el área de un círculo de 14 cm de radio es 196π cm^2, ¿cuál será el área de un círculo de 7 cm de radio?

8) La longitud de una circunferencia es directamente proporcional a su radio. Si 14π cm es la longitud de una circunferencia de 7 cm de radio, ¿cuál es el radio de una circunferencia de 66 cm de longitud?

NOTA: para reforzar este tema sigue practicando en el banco de reactivos.

2.2. FUNCIONES LINEALES

Aprendizajes. El alumno:
1) Transita entre las distintas formas de representación (tabular, gráfica, algebraica) asociadas a una función lineal de la forma ***y = ax + b****, con* ***b*** *distinto de 0.*
2) Distingue, por el contexto de la situación, si se trata de una variable discreta o continua, y lo toma en cuenta para construir la gráfica.
3) Identifica que en una Función Lineal, la variación de la variable dependiente es proporcional a la variación que sufre la variable independiente.
4) Reconoce a ***b*** *como el parámetro que desplaza verticalmente b unidades a la gráfica de la recta* ***y = ax.***
5) Reconoce a ***a*** *como el parámetro que determina una mayor o menor inclinación, respecto del eje x, de la recta* ***y = ax + b****.*
6) Grafica funciones de la forma ***y= ax + b****, a partir de la información que proporcionan los parámetros* ***a*** *y* ***b****.*
7) Percibe que la inclinación de la recta está relacionada con la razón que compara los cambios de y con los de ***x*** *(es decir, con* $\Delta y/\Delta x$*).*
8) Analiza las relaciones existentes entre ambas variables, para plantear tanto el Modelo Algebraico como el gráfico. Utiliza esos modelos para obtener información adicional de la situación dada.
9) Percibe que las funciones lineales son una herramienta útil para representar y analizar diversas situaciones.

2.2.1 Formas de representación de una función lineal: tablas, gráficas y Modelo Algebraico.

Hasta el momento hemos trabajado con modelos algebraicos cuya gráfica es una línea recta cuyo Modelo Algebraico es $y = ax + b$, este modelo presenta dos casos:

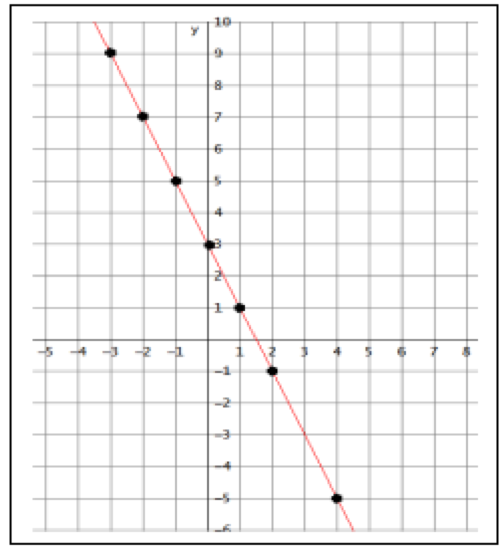
- ✓ Si $b = 0$, corresponde a una **variación proporcional directa** y es de la forma $y = kx$, representa una **recta que pasa por el origen**.
- ✓ Si $b \neq 0$, NO corresponde a una variación proporcional directa, representa una **recta que no pasa por el origen**, corta al eje Y en el punto $(0 , b)$.

En cualquiera de estos casos su Modelo Algebraico representa una FUNCIÓN LINEAL.

Ejemplo 1) Analizaremos el Modelo Algebraico, $2x + y - 3 = 0$, donde x es la variable independiente y la dependiente es y. Hacer una tabla de valores y trazar su gráfica.

Solución:
Despejando a y, $y = -2x + 3$. Se le dan algunos valores a x, ya que ambas variables son **continuas**, es decir, pueden tomar cualesquiera valores.

x	$y = -2x + 3$
– 3	–2(–3) + 3 = **9**
– 2	–2(–2) + 3 = **7**
– 1	–2(–1) + 3 = **5**
0	– 2(0) + 3 = **3**
1	– 2(1) + 3 = **1**
2	– 2(2) + 3 = **–1**
4	–2(4) + 3 = **–5**



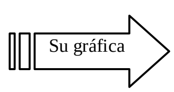
Observaciones importantes:

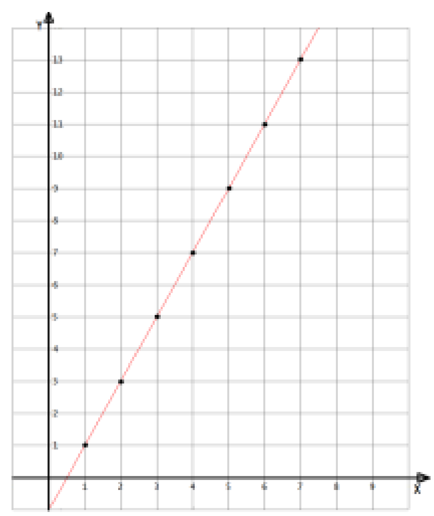
- ✓ Para todo valor de x le corresponde uno y sólo un valor de y, toda relación que cumple esa correspondencia se le llama FUNCIÓN.

- ✓ En todo Modelo Algebraico de la forma $y = ax + b$, sus variables x y y pueden tomar cualquier valor ya sea enteros o decimales, por tal razón sus puntos se unen y la línea recta se puede prolongar en ambas direcciones.

Ejemplo 2) La relación entre dos magnitudes está dada en la siguiente tabla, trazar su gráfica suponiendo que las variables x y y son continuas (pueden tomar cualquier valor, ya sea entero o decimal), y determina su Modelo Algebraico.

x	y
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9
6	11
7	13



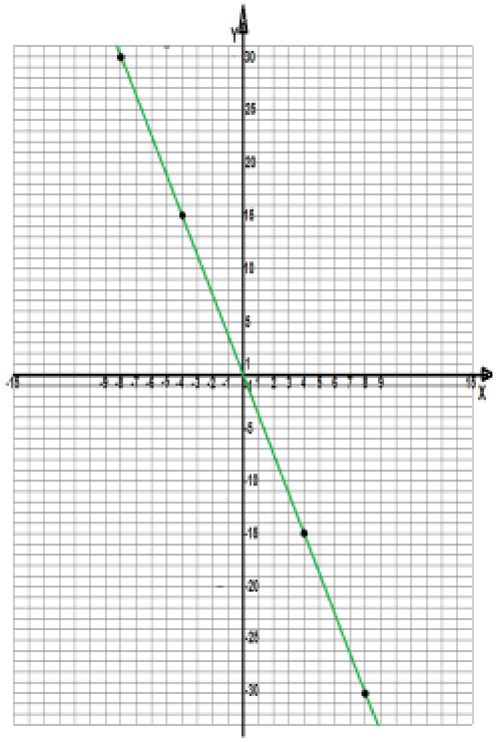


Solución:

1º) En un plano cartesiano se localizan los puntos de la tabla y se unen, ya que las variables representan magnitudes, entonces la gráfica es **continua**.

2º) Observando la relación de los números y después de varios intentos debes de fijarte que todos los valores de y son el doble de su correspondiente x menos uno, es decir, el Modelo Algebraico es $y = 2x - 1$.

Ejemplo 3) Dada la siguiente gráfica, determina su Modelo Algebraico y construye una tabla de valores.



Solución:
Como la recta pasa por el origen esta representa a una Variación Directamente Proporcional, entonces su modelo es $y = kx$, donde $k = y/x$. Para facilitar los cocientes, sobre la gráfica se marcan las intersecciones entre números enteros y se hacen los cocientes de estos números.

k = –15/4 o
o k = – 30/8 = –15/4
o k = 15/–4 = –15/4
etc.

Finalmente el Modelo Algebraico es $y = -15/4x$

Observación:

✓ La gráfica de toda FUNCIÓN LINEAL es una **línea recta**.

Ejercicios 2.2.1

I. Analiza cada una de las funciones lineales, escribe cuál es la variable independiente y cuál la dependiente. Construye una tabla de valores y trazar su gráfica.

1) $y = 3x + 2$ 2) $6 - 2y = -4x$ 3) $2x + y = 3$

4) $y = -2x + 1$ 5) $3y = 12x$ 6) $5x + 4y = 20$

II. Para cada una de las siguientes tablas de valores, dar su Modelo Algebraico y trazar su gráfica, suponiendo que las variables son continuas.

1)

x	0	1	2	3	4
y	– 1	0	1	2	3

2)

x	– 2	– 1	1	2	3
y	– 1	0	2	3	4

3)

x	– 3	– 1	0	2	4
y	– 6	– 2	0	4	8

4)

x	– 2	– 1	1	2	3
y	– 3	– 1	3	5	7

5)

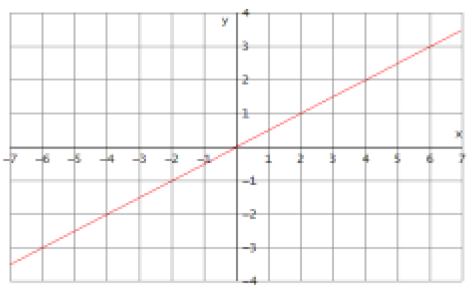
x	– 4	– 2	0	2	6
y	– 1	0	1	2	4

6)

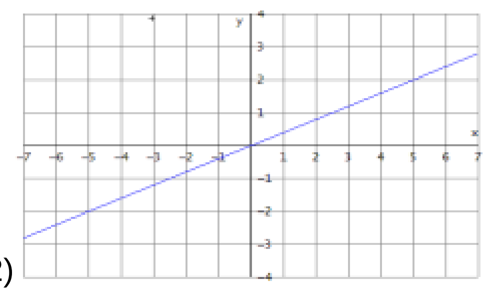
x	– 3	– 1	1	2	3
y	– 7	– 1	5	8	11

III. Para cada una de las siguientes gráficas encuentra su Modelo Algebraico y escribe una tabla de valores.

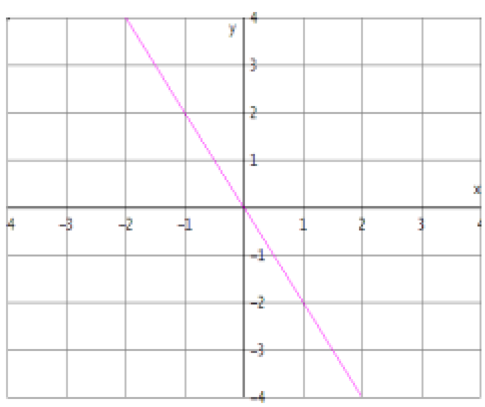
1)



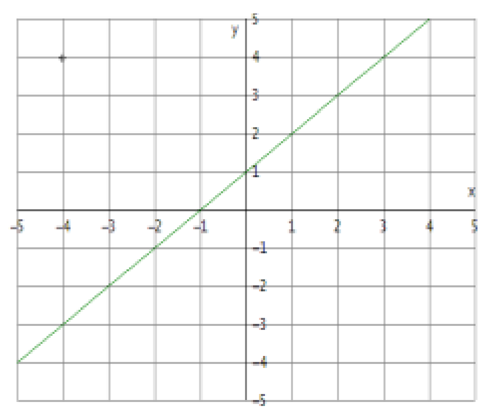
2)



3)



4)



NOTA: para reforzar este tema sigue practicando en el banco de reactivos.

2.2.2 Variación Lineal.

La variación lineal entre dos variables está dada por el Modelo Algebraico:

$$y = ax + b$$

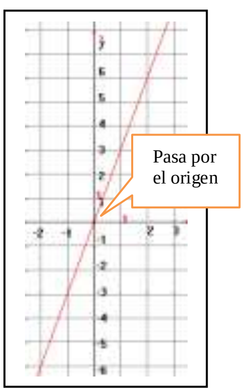
Cada uno de los valores que toman sus variables o sus parámetros indican un cambio muy importante, ya trabajamos cuando $b = 0$ y cuando $b \neq 0$, pero hay otros más que a continuación analizaremos.

2.2.3 Análisis de los parámetros a y b en el comportamiento de la gráfica de $y = ax + b$ ó $f(x) = ax + b$

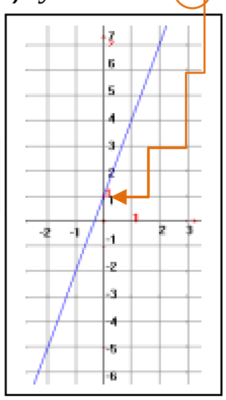
Toda función lineal es de la forma $y = ax + b$, donde el número a es llamada la pendiente y el número b es la ordenada al origen.
La **pendiente** indica la inclinación de la recta, si es positiva se inclina a la derecha, si es negativa la recta se inclina a la izquierda.
La **ordenada al origen** es por donde la recta corta al eje Y.

Caso 1) Ordenada al origen (b): por donde la gráfica corta al eje Y.

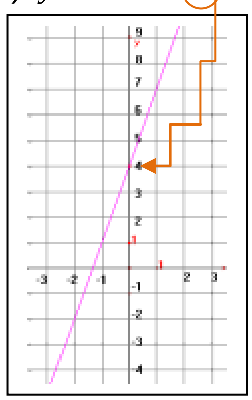
1) $y = 3x$



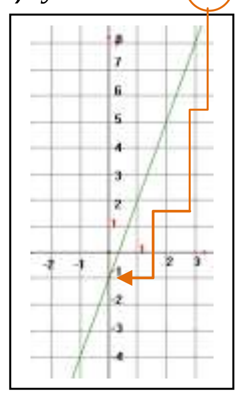
2) $y = 3x + 1$



3) $y = 3x + 4$



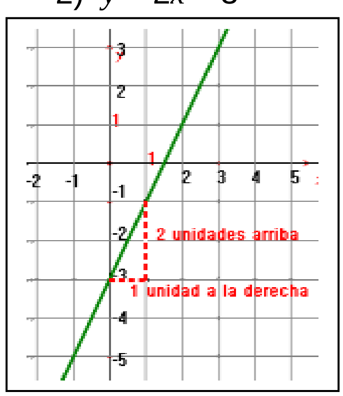
4) $y = 3x - 1$



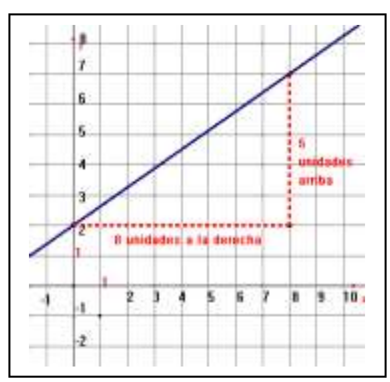
Caso 2) La **pendiente** (a): define la inclinación de la recta.

1) $y = 3x + 1$

2) $y = 2x - 3$



3) $y = \frac{5}{8}x + 2$



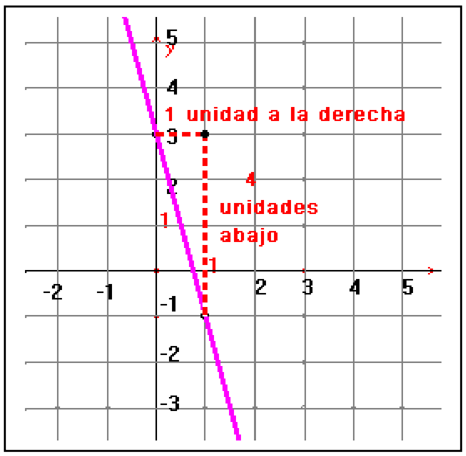
En $y = 3x + 1$ su pendiente es $a = 3 = \dfrac{3 \text{ unidades hacia arriba}}{1 \text{ unidad a la derecha}}$

En $y = 2x - 3$ su pendiente es $a = 2 = \dfrac{2 \text{ unidades hacia arriba}}{1 \text{ unidad a la derecha}}$

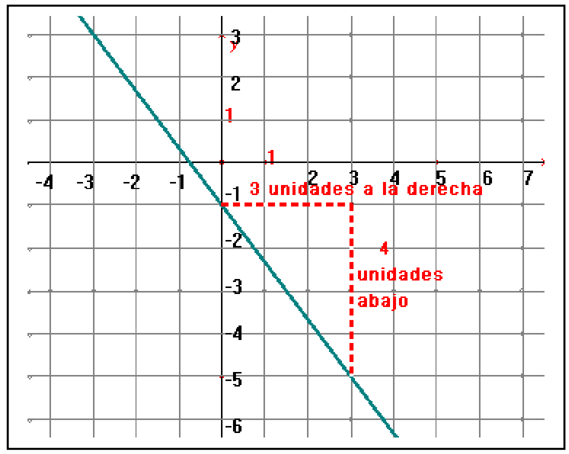
En $y = \frac{5}{8}x + 2$ su pendiente es $a = \frac{5}{8} = \dfrac{5 \text{ unidades hacia arriba}}{8 \text{ unidad a la derecha}}$

Observa que en estos casos la **pendiente es positiva** y la recta se inclina a la **derecha**.

4) $y = -4x + 3$



5) $y = -\frac{4}{3}x - 1$



En $y = -4x + 3$ su pendiente es $a = -4 = \dfrac{4 \text{ unidades hacia abajo}}{1 \text{ unidad a la derecha}}$

En $y = -\frac{4}{3}x - 1$ su pendiente es $a = -\frac{4}{3} = \dfrac{4 \text{ unidades hacia abajo}}{3 \text{ unidades a la derecha}}$

Observa que en estos dos últimos casos la **pendiente es negativa** y la recta se inclina a la **izquierda**.

2.2.4 Comparación entre los cambios de y respecto a los de x ($\Delta y/\Delta x$).

En los ejercicios anteriores, como el caso 2, para trazar la gráfica nos fijamos en dos tipos de avances: $\dfrac{\text{avance vertical}}{\text{avance horizontal}} = \dfrac{\text{avance en dirección del eje Y}}{\text{avance en dirección del eje X}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

A este cociente se le llama incremento de y entre el incremento de x, también conocido como la **pendiente** de la recta. Recuerda que estos avances se realizan a partir de la ordenada al origen.

2.2.5 Vinculación entre a y el cociente $(\Delta y/\Delta x)$.

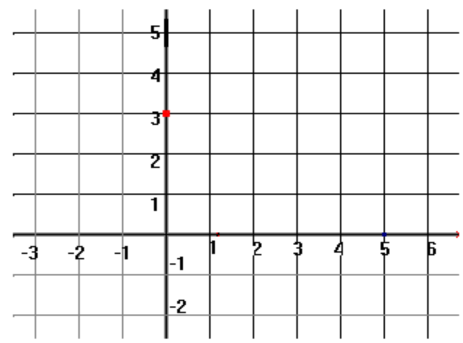
La **pendiente** indica la inclinación de la recta, si es positiva se inclina a la derecha, si es negativa la recta se inclina a la izquierda. A la pendiente también se le conoce como el número $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, es decir, **pendiente de la recta** = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Si la ecuación de una recta es $y = ax + b$, entonces $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Ejemplos:

1) Trazar la gráfica de la función lineal $y = 5x + 3$:

Solución:

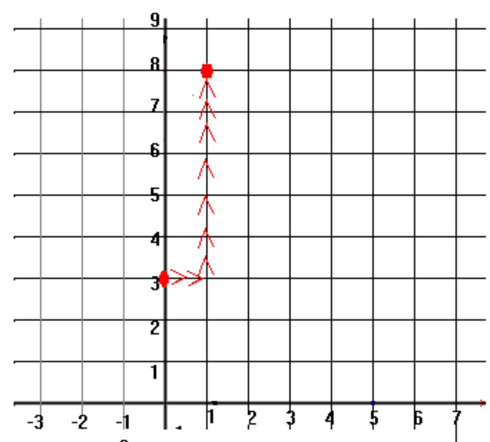
1º) Nos fijamos en la ordenada al origen que es 3, y colocamos un punto sobre el eje Y en 3.



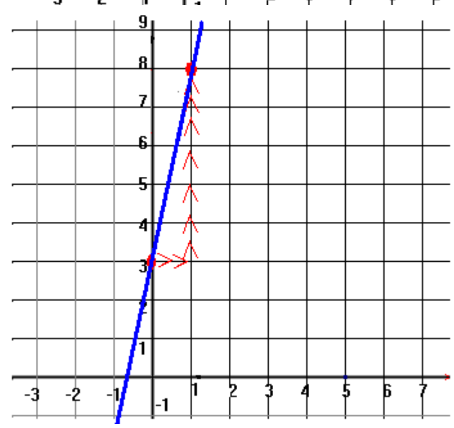
2º) Nos fijamos en la **pendiente** de la recta que es 5, y lo ponemos en forma de fracción:

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{\text{5 unidades hacia arriba}}{\text{1 unidad hacia la derecha}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

3º) A partir del punto 3 sobre el eje Y, avanzamos hacia la derecha 1 unidad y hacia arriba 5 unidades. Así, marcamos el segundo punto.



4º) Tomamos una regla y unimos los dos puntos prolongando en ambos lados, y nos queda la gráfica de la recta o función lineal $y = 5x + 3$.



2) Trazar la gráfica de la función lineal $4y + 3x + 8 = 0$.

Solución:

Esta ecuación NO está en la forma $\boldsymbol{y = ax + b}$, para escribirla en esa forma se tiene que despejar a y.

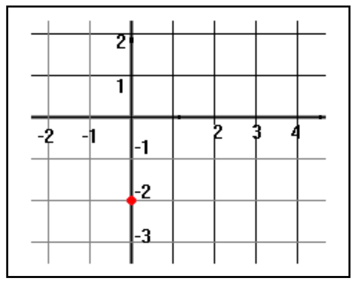
Despejándola: $4y + 3x + 8 = 0$

$$4y = -3x - 8$$

$$y = \frac{-3x - 8}{4} = -\frac{3}{4}x - 2$$

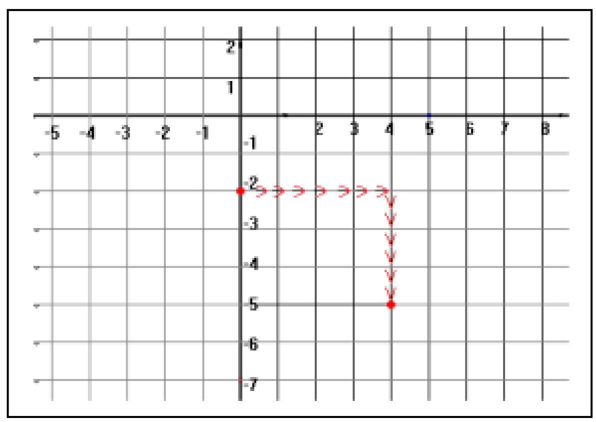
Así, tenemos que graficar la función lineal $y = -\frac{3}{4}x - 2$ que es equivalente a $4y + 3x + 8 = 0$. Para esto seguiremos los pasos del ejemplo 1.

1º) Colocamos un punto en – 2 sobre el eje Y, ya que es la ordenada al origen



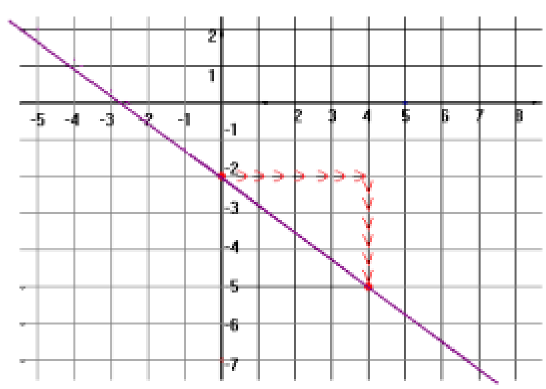
2º) Nos fijamos en la pendiente $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ de la recta. Es $-\frac{3}{4}$, que ya está en forma de fracción:

$$\frac{3 \text{ unidades hacia abajo}}{4 \text{ unidades a la derecha}}$$



3º) A partir del punto –2 sobre el eje Y, avanzamos hacia la derecha 4 unidades y hacia abajo (por el signo menos) 3 unidades. Y marcamos el segundo punto.

4º) Tomamos una regla y unimos los dos puntos prolongando en ambos lados, y nos queda la gráfica de la recta o función lineal $4y + 3x + 8 = 0$.



Ejercicios 2.2.2

I. Determina cuáles de las siguientes variaciones representan una función lineal.

1) $y = -3x + 2$ 2) $y = -4x$ 3) $\frac{5}{x} + y = 3$

4) $x - y = 0$ 5) $3xy = 5$ 6) $5x + 6 = 3y$

7) $3x^2 + y = 1$ 8) $2x = 3y$ 9) $\sqrt{2x} + 4y = 8$

10) $y = (2x + y)^2$ 11) $\frac{5x - 2y}{3} = 5$ 12) $7x = 3y - 1$

II. Para las siguientes funciones lineales decir cuál es la ordenada al origen y su pendiente.

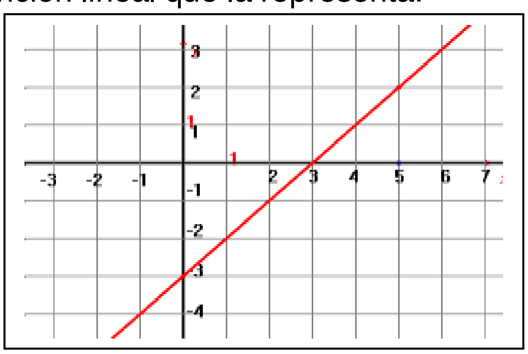
1) $y = 2x - 3$ 2) $y = -3x + 4$ 3) $5x + 2y = 6$

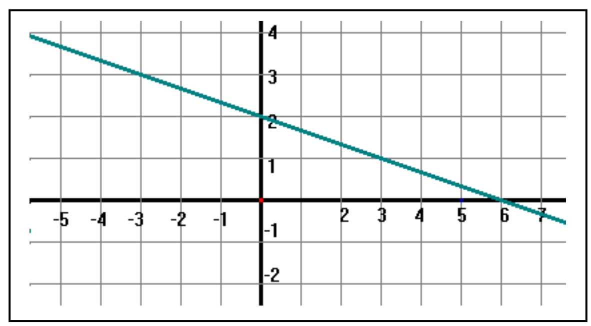
4) $3y - 5x + 12 = 0$ 5) $4x = 5y + 10$ 6) $4x - y = 0$

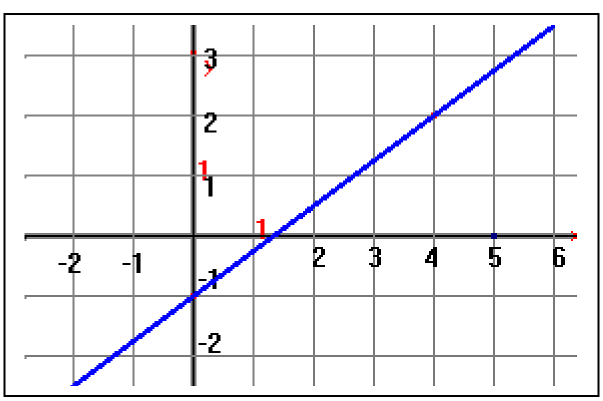
7) $2y = 3x + 8$ 8) $15 = 3y + x$ 9) $7x - 4y + 12 = 0$

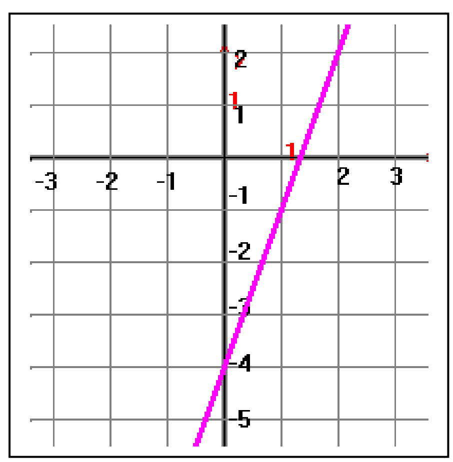
III. Trazar las gráficas de las funciones lineales del punto II.

IV. Para cada gráfica dar su ordenada al origen y su pendiente, también, escribe la función lineal que la representa.

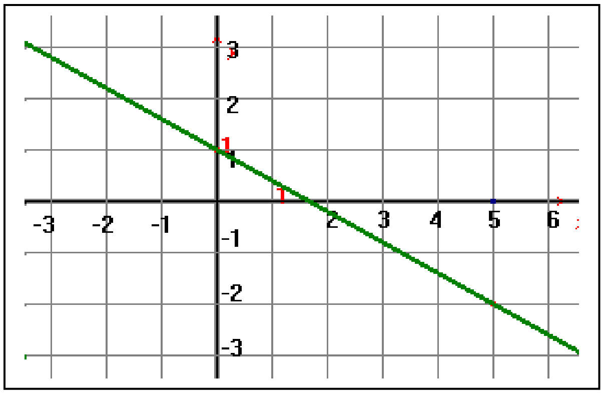
1)


2)


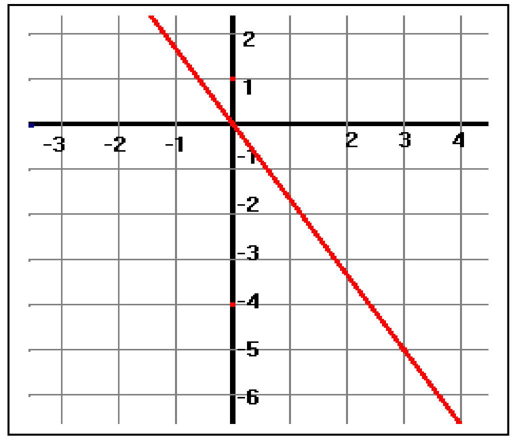
3)


4)


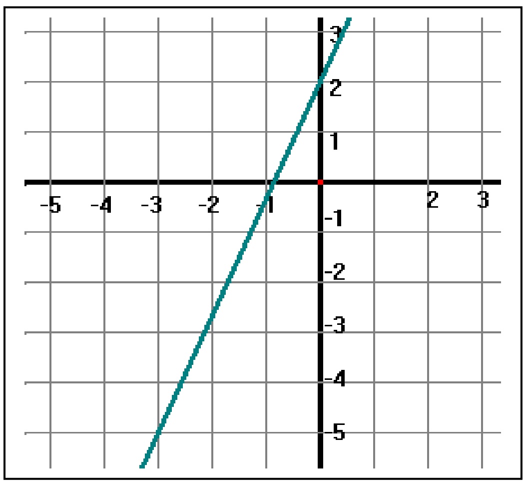
5)



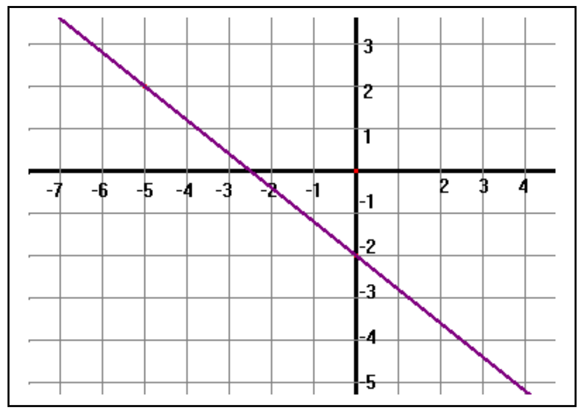
6)



7)



8)



NOTA: para reforzar este tema sigue practicando en el banco de reactivos.

2.2.6 Situaciones de diversos contextos que se modelan con una función lineal.

Veamos la aplicación de lo que has aprendido sobre función lineal.

Ejemplo 1) Una carretera recta e inclinada tiene una pendiente ascendente del 20% ¿Cuál será su valor?

Solución:

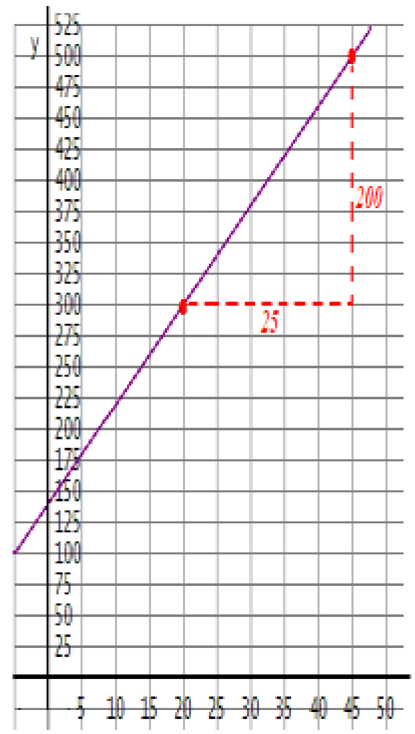
Recordando que la pendiente es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{avance vertical}}{\text{avance horizontal}} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

Ejemplo 2) Doña Tomasa es una señora que se gana la vida vendiendo artesanías. El costo total de elaborar 20 piezas de cerámica a la semana es de \$300, pero si ella contara con \$500 a la semana podría elaborar 45 piezas de cerámica. Suponiendo que el modelo del costo es lineal, contesta las siguientes preguntas.

a) Representa mediante una gráfica, y determina la función del costo total semanal que tiene doña Tomasa al producir sus artesanías de cerámica.
b) Si doña Tomasa dispusiera de \$380 a la semana, ¿cuántas piezas de cerámica puede elaborar?

Solución:

a) Representaremos en el eje *X* el número de piezas de cerámica que puede realizar doña Tomasa a la semana, y en el eje *Y* el costo total de producirlas.



El problema nos proporciona las coordenadas de dos puntos del plano que son (20, 300) y (45, 500), y cómo es un modelo lineal, con esos dos puntos podemos trazar la recta que representa a dicha función cuya forma es $y = ax + b$, donde su pendiente es $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Para encontrar su **pendiente**: desde los dos puntos trazamos el avance a la derecha $\Delta x = 25$, y el avance hacia arriba $\Delta y = 200$. Entonces, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 8 = a$, y la función lineal es $y = 8x + b$. Falta encontrar b que es **la ordenada al origen**, es decir, por donde la recta corta al eje Y.

Para encontrarla usaremos cualquiera de los puntos, usemos el punto (20 , 300), este se sustituye en $y = 8x + b$ y se despeja b:

$$300 = 8(20) + b \quad \Rightarrow \quad 300 - 160 = b \quad \Rightarrow \quad b = 140$$

Por lo tanto, la función lineal es $y = 8x + 140$

b) Si doña Tomasa dispone de \$380, es un valor de y. Se sustituye en $y = 8x + 140$ y se despeja x: $380 = 8x + 140 \quad \Rightarrow \quad 380 - 140 = 8x \quad \Rightarrow \quad x = 30$

Entonces con \$380 doña Tomasa puede producir 30 piezas de cerámica.

Ejemplo 3) Un vendedor de la tienda infantil "El Monito Regalón" tiene un sueldo base de \$3500 mensuales más el 10% de sus ventas realizadas durante el mes. Encuentra la función lineal que relaciona el sueldo mensual con las ventas realizadas en el mes, ¿cuánto es lo que logra ganar durante un año de trabajo?

Solución:

Haciendo una tabla se facilita encontrar la función lineal pedida.

\$Venta(x)	0	100	200	500	1000
\$Sueldo (y)	3500	3510	3520	3550	3600

La función lineal es $y = 0.1x + 3500$

Ejemplo 4) En las primeras 10 semanas de cultivo de una planta, que medía 5 cm, se ha observado que su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, viendo que en la primera semana ha pasado a medir 5.5 cm. Establecer una función lineal que dé la altura de la planta en función del tiempo y representarla gráficamente.

Solución:

Altura inicial de la planta: 5 cm

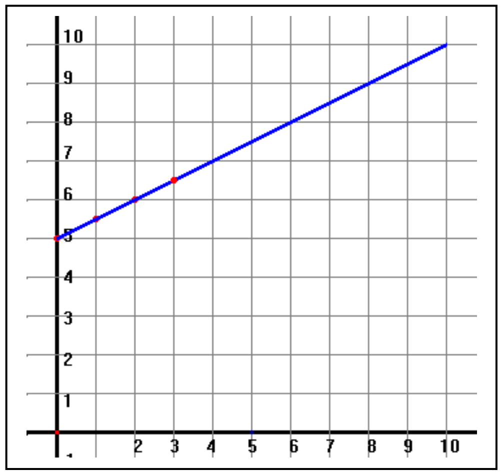
Si su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, entonces su crecimiento semanal es de 5 – 5.5 = 0.5

Haciendo una tabla para algunas semanas, recordando que el crecimiento es proporcional:

Semana(x)	0	1	2	3
Altura (y)	5	5.5	6	6.5

La función lineal es:

$y = 0.5x + 5$



Ejemplo 5) Por el alquiler de un coche cobran \$500 diarios más \$10 por kilómetro. Encuentra la ecuación de la recta que relaciona el coste diario con el número de kilómetros y represéntala. Si en un día se han recorrido un total de 300 km, ¿qué importe se debe pagar?

Solución:

Costo inicial diario \$500

Si son \$10 por kilómetro, haciendo una tabla se tiene:

Kilómetros(x)	0	1	2	3
\$Costo (y)	500	510	520	530

La función lineal es: $y = 10x + 500$

Ejemplo 6) Un alpinista escala un acantilado a 706 metros de altura. A las 8:00 hrs. asciende 188 metros, a las 11:00 hrs ha alcanzado una altura de 410 metros, como se muestra en la figura, suponiendo que su ascenso es constante:

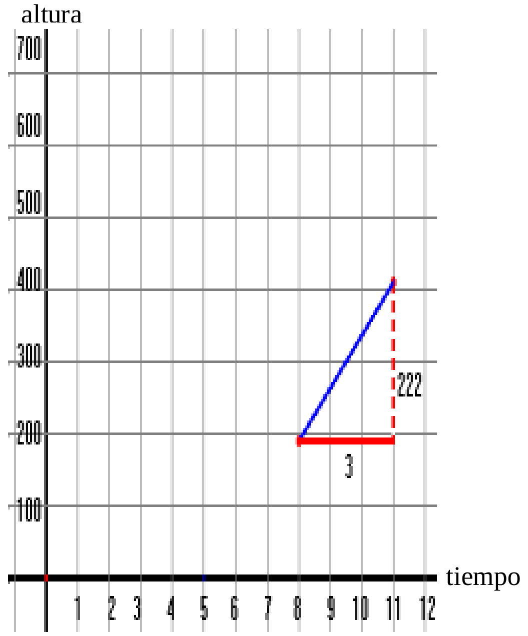
a) Encuentra la razón de cambio promedio del alpinista y úsala para encontrar la ecuación de la recta que relaciona la altura del alpinista con el tiempo.

b) ¿A qué hora empezó a escalar el acantilado?

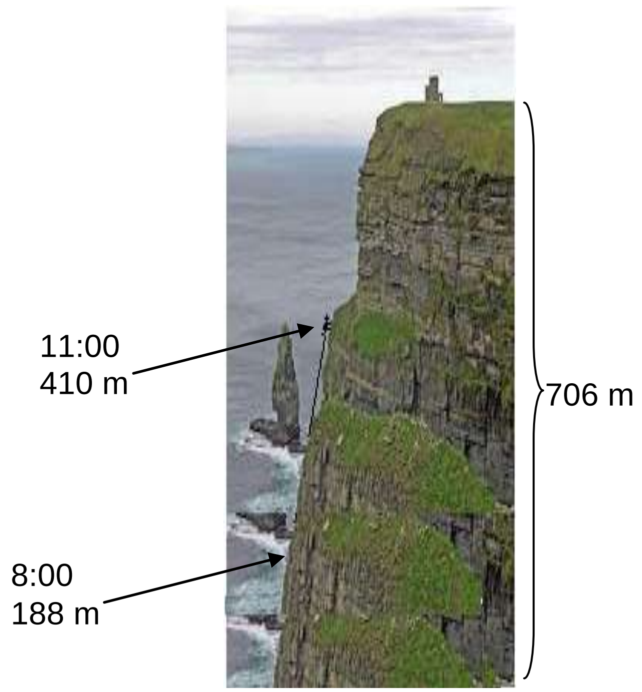
c) Encuentra a qué hora el alpinista llega a la cima.

Solución:

a) De los datos tenemos dos puntos que localizamos en un plano cartesiano (8 , 188) y (11 , 410).



Figura



Unimos los dos puntos para encontrar la pendiente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ que también es llamada **la razón de cambio**.

Para esto hacemos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{410-188}{11-8} = \frac{222}{3} = 74$ que es **la razón de cambio**.

Entonces, la función lineal es de la forma $y = 74x + b$, falta encontrar b.

Usaremos uno de los puntos, por ejemplo (8 , 188). Al sustituirlo tenemos:

$188 = 74(8) + b \quad \Rightarrow \quad 188 - 592 = b \quad \Rightarrow \quad -404 = b$

Finalmente, la función lineal es: $y = 74x - 404$

b) Para encontrar a qué hora empezó a escalar el alpinista, se sustituye la altura $y = 0$ en la función lineal encontrada y se despeja x.

$0 = 74x - 404 \quad \Rightarrow \quad 0 + 404 = 74x \quad \Rightarrow \quad 5.459 = x$

Empezó a escalar a las 5.46 hrs aproximadamente, es decir a las 5:28 am.

c) Para saber a qué hora el alpinista llega a la cima del acantilado, se usa la función lineal encontrada y se sustituye 706 en el valor de y, ya que es la altura total del acantilado.

$$706 = 74x - 404 \quad \Rightarrow \quad 706 + 404 = 74x \quad \Rightarrow \quad 15 = x$$

Esto quiere decir que llegará a la cima a las 15:00 hrs, es decir a las 3:00 pm.

Ejercicios 2.2.6

Resuelve los siguientes ejercicios.

1) Identificar e interpretar la **pendiente** en las siguientes funciones lineales:

a) C= $55x + 1820$ es la función que representa el costo (en millones) estimado por Aceros México en el periodo 1997 - 2010 (x representa la producción de acero en toneladas por año).
b) Q= $-0.15p + 0.14$ es una función que estima la demanda anual de arroz en India en el periodo 1995 - 2000 (p es el precio y Q es el consumo por persona)

2) La función de costo de una empresa está dada por $C = 9q + 16$ ¿Cuál será el costo fijo y el costo variable?

3) Una empresa tiene costos fijos de $1500 y le cuesta producir cada artículo $120. Escribir un modelo algebraico (ecuación) que permita calcular el costo total.

4) Durante una tormenta vemos el rayo antes de oír el trueno, porque la luz viaja a mayor velocidad que el sonido. La distancia entre tu posición y el centro de la tormenta varía directamente con el tiempo que pasa entre el rayo y el trueno.

a) Suponiendo que el trueno de una tormenta cuyo centro está a 1650 metros de distancia, tarda 5 segundos en alcanzar al rayo, determina la constante de proporcionalidad y escribe el modelo matemático.
b) Traza la gráfica del modelo matemático encontrado o la función lineal.
c) ¿Qué representa la constante de proporcionalidad?

5) Supongamos que el costo total por producir lapiceros tiene un comportamiento lineal, una función que la representa está dada en ¢ por $C(x) = 10x + 950\ 000$, donde x representa el número de lapiceros producidos por mes. Con base en la relación anterior, ¿cuál será el costo que representaría para la empresa la producción de 100,000 lapiceros en el mes? Nota: $C(x)$ es otra forma de representar a y.

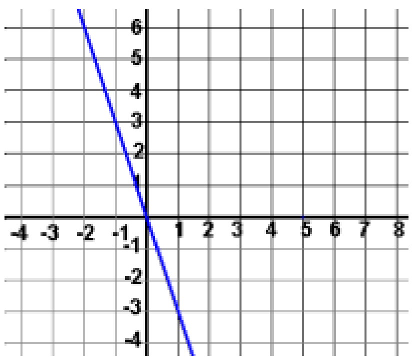
6) En algún lugar de esta ciudad, Sergio pone \$14 en un parquímetro, este le indica que dispone de 45 minutos de estacionamiento, mientras que Luisa coloca \$8 y le indica que dispone de 28 minutos.
Encuentra la función lineal que relaciona el precio con el tiempo de estacionamiento y traza su gráfica.

a) ¿Cuánto hay que pagar para disponer de 70.5 minutos de estacionamiento?
b) Si se ponen \$20, ¿de cuánto tiempo de estacionamiento dispongo?

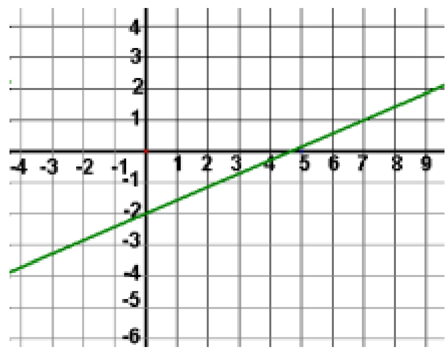
7) Por lo general, cuando Silvia usa su auto, lo pone en marcha por 3 minutos para su calentamiento, y después se aleja a 40 km/h en promedio. Encuentra la función lineal que relaciona el tiempo con los kilómetros recorridos.

8) Determine la pendiente de la recta que se muestra en cada gráfica:

a)



b)



9) Encuentra el Modelo Algebraico de la función lineal que es perpendicular al eje Y y que pasa por el punto (5 , 3).

10) Encuentra el Modelo Algebraico de la función lineal que es perpendicular al eje X y que pasa por el punto (– 2 , 7).

11) Encuentra el Modelo Algebraico de la función lineal cuyos puntos están a la misma distancia tanto del eje X como del eje Y.

12) Durante el ascenso a una montaña, la temperatura desciende 2 grados cada 200 metros de ascenso.

a) ¿A qué altura habrá que ascender para alcanzar – 15º C, si en el punto de partida la temperatura es de 5ºC y está a una altitud de 300 metros?
b) Si t representa la temperatura y A la altura de ascenso en la montaña, encontrar la función lineal que relaciona la temperatura con la altura de la montaña.

NOTA: para reforzar este tema sigue practicando en el banco de reactivos.

A U T O E V A L U A C I O N

Con esta evaluación verificarás si realmente has adquirido los conocimientos básicos necesarios para aprobar esta unidad. Para hacer esta evaluación, es necesario que la resuelvas sin consultar algún texto durante la solución.

Esperamos que esta autoevaluación la termines en 1 hora como máximo.

1) Escribe el modelo matemático o la ecuación que definen cada una de las siguientes variaciones:
a) Los geólogos han encontrado, en estudios sobre la erosión de la tierra que la fuerza erosiva P de una corriente rápida de agua varía directamente como la sexta potencia de la velocidad v del agua.
b) La energía cinética E de un cuerpo en movimiento es directamente proporcional a su peso W y al cuadrado de su velocidad v.

2) Resuelve el siguiente problema estableciendo una proporción:
La distancia que una bola rueda por un plano inclinado es directamente proporcional al cuadrado del tiempo que rueda. Durante el primer segundo la bola rueda 6 pies.
   a) Escribe una ecuación que relacione la distancia recorrida con el tiempo.
   b) ¿Qué distancia recorrerá la bola en los primeros 3 segundos?

3) Si p varía directamente con el cubo de q, y $p = 40$ cuando $q = 2$, encuentra el valor de p cuando $q = \frac{4}{5}$.

4) Para cada tabla de datos di si expresan una variación proporcional directa o no, justificando tu respuesta y determina el modelo matemático para cada una.

a)

x	– 2	– 1	1	2	3
y	0	1	3	4	5

b)

x	– 2	– 1	1	2	3
y	– 4	–2	2	4	6

5) Para cada una de las siguientes ecuaciones menciona si representan una función lineal, una variación proporcional directa o ninguna de las dos, y en un mismo plano cartesiano traza la gráfica de cada una.
a) $3x - y = 0$ b) $y = \frac{2}{3}(x + 6)$ c) $4x - 6 = 3y - 6$

ESCALA:
Para considerar si has adquirido los aprendizajes de esta unidad, es necesario que resuelvas correctamente todos los ejercicios. Si resuelves bien menos de 3 preguntas, tienes que volver a estudiar con mayor conciencia esta unidad, realizando todos los ejercicios propuestos y los del Banco de Reactivos.
Si contestas bien 3 ejercicios has logrado aprender sólo los conocimientos básicos, pero si resolviste 4 o 5 vas avanzando bien en tu estudio y estás listo para continuar con la siguiente unidad.